Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Dr. Daniel Palacin — Wintersemester 2018/2019

Bewertete Körper
Blatt 7
Abgabe: 10.12.2018

Aufgabe 1 (8 Punkte).

(a) Sei X eine abgeschlossene Teilmenge eines normierten Körpers K. Zeige, dass für jede Teilmenge Y von K die Menge

$$\{z \in K \mid z \cdot Y \subset X\}$$

abgeschlossen ist.

(b) Zeige für jede Primzahl p, dass $\mathbb{Z}$ dicht in $\mathbb{Z}_p$ ist.

(c) Schließe daraus, dass jede abgeschlossene Untergruppe von $(\mathbb{Z}_p, +)$ ein Ideal von $\mathbb{Z}_p$ ist.

(d) Beschreibe alle abgeschlossenen Untergruppe von $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Eine Untergruppe H einer abelschen Gruppe $(G, +)$ ist *rein*, falls es für jedes n aus $\mathbb{N}$ und jedes h aus H ein h' aus H mit $nh' = h$ gibt, wenn es ein g in G mit $ng = h$ gibt.

(a) Falls $G = H \oplus K$, zeige, dass H rein in G ist.

(b) Für $G = \mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, zeige, dass die reine Untergruppe $\mathbb{Q}$ von G nicht unter 2-te Wurzeln (additiv betrachtet) abgeschlossen ist.

(c) Falls G/H torsionsfrei ist, zeige, dass H rein in G ist.

(d) Wenn G torsionsfrei ist, zeige, dass die dividierbare Hülle

$$\mathrm{Div}_G(H) = \{g \in G \mid \exists n \neq 0 \in \mathbb{N} \text{ mit } ng \in H\}$$

die kleinste reine Untergruppe von G ist, welche H enthält.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Sei $(\Gamma_1, \leq)$ eine Untergruppe von $(\Gamma_2, \leq)$, als angeordnete Gruppen, derart, dass $\Gamma_2 = \mathrm{Div}_{\Gamma_2}(\Gamma_1)$.

(a) Gegeben $H \leq \Gamma_1$ konvex, zeige, dass $\mathrm{Div}_{\Gamma_2}(H)$ eine konvexe Untergruppe von Γ_2 ist.

(b) Zeige, dass $\Gamma_1 \cap \mathrm{Div}_{\Gamma_2}(H) = H$.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.29 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 10 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.